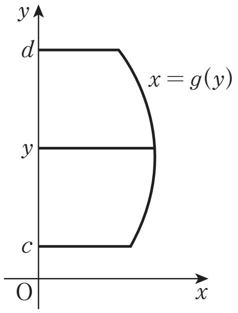
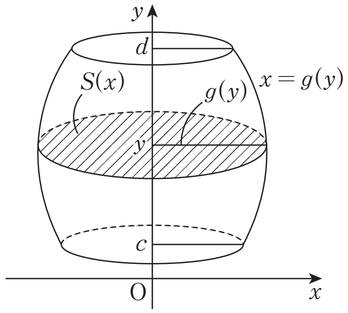
PART4 y 軸の周りの回転体の体積

要点整理と公式

要点 ① y 軸の周りの回転体の体積

$c<d$ のとき，曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は，x 軸の周りの回転体と同様に考えて次の公式で求めることができる。





y 軸の周りの回転体の体積

$c<d$ のとき

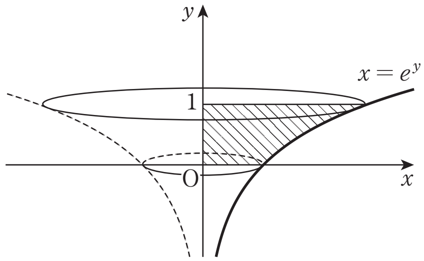
$$V=\pi\int_c^d\{g(y)\}^2\,dy=\pi\int_c^d x^2\,dy$$

(ex) 曲線 $y=\log x$ と x 軸，y 軸および直線 $y=1$ で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V について

$y=\log x$ より $x=e^y$ 　　$x^2=e^{2y}$

$$V=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1 e^{2y}\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2}\pi$$



[MEMO]

4 次の曲線や直線で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y=x^2+1$，$y=3$

(2) $y=-x^2+4x$，x 軸

Point Pickup

y 軸の周りの回転体の体積

曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c$，$y=d$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2\,dy=\pi\int_c^d x^2\,dy \qquad (c<d)$$

第21講 PART4 確認問題

1 曲線 $y=x^2-2$ と直線 $y=4$ で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\boxed{\text{アイ}}\pi$ である。

2 曲線 $y=-x^2+2x$ と x 軸で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ である。

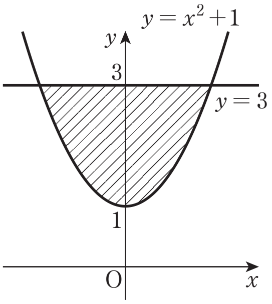
PART4 y 軸の周りの回転体の体積

4 次の曲線や直線で囲まれた図形を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y=x^2+1$，$y=3$　　(2) $y=-x^2+4x$，x 軸

[解答]

(1) $y=x^2+1$ より $x^2=y-1$



$$V=\pi\int_1^3(y-1)dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2-y\right]_1^3$$

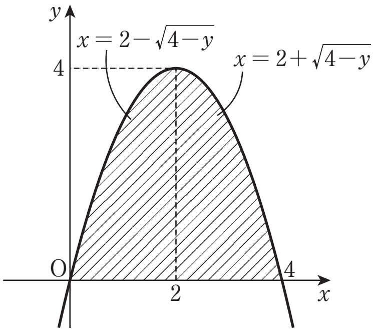
$$=2\pi$$

(2) $y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$

$(x-2)^2=4-y$

$x=2\pm\sqrt{4-y}$

$0\leqq y\leqq 4$ において $2+\sqrt{4-y}\geqq 2-\sqrt{4-y}\geqq 0$



$$V=\pi\int_0^4(2+\sqrt{4-y})^2dy-\pi\int_0^4(2-\sqrt{4-y})^2dy$$

$$=\pi\int_0^4\{(2+\sqrt{4-y})^2-(2-\sqrt{4-y})^2\}dy$$

$$=\pi\int_0^4\{(4+4\sqrt{4-y}+4-y)-(4-4\sqrt{4-y}+4-y)\}dy$$

$$=8\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy$$

$$=8\pi\left[-\frac{2}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{128}{3}\pi$$

第21講 PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：18

[解説]

$y=x^2-2$ より，

$$x^2=y+2$$

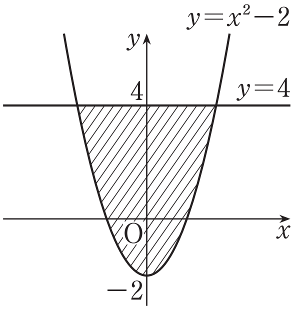
求める立体の体積は，

$$\pi\int_{-2}^{4}(y+2)\,dy$$

[A]

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-2}^{4}$$

$$=\mathbf{18\pi}$$



[A]　y 軸の周りの回転体の体積
曲線 $x=g(y)$ と y 軸および2直線 $y=c$，$y=d$ $(c<d)$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{c}^{d}\{g(y)\}^2\,dy$$

2　[正解] ウ：8，エ：3

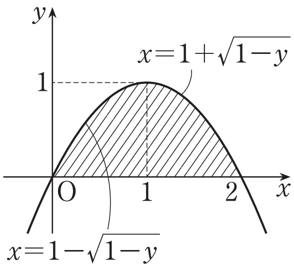
[解説]

$$y=-x^2+2x$$

$$=-(x-1)^2+1$$

$$(x-1)^2=1-y$$

$$x=1\pm\sqrt{1-y}$$ [B]



$0 \leqq y \leqq 1$ において，

$$1+\sqrt{1-y} \geqq 1-\sqrt{1-y} \geqq 0$$

よって，求める立体の体積は，

$$\pi\int_0^1(1+\sqrt{1-y})^2\,dy-\pi\int_0^1(1-\sqrt{1-y})^2\,dy$$

[C]

$$=\pi\int_0^1\{(1+\sqrt{1-y})^2-(1-\sqrt{1-y})^2\}dy$$

$$=\pi\int_0^1\{(1+2\sqrt{1-y}+1-y)$$

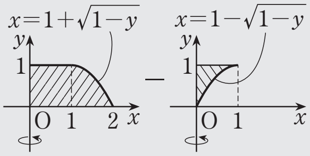
$$-(1-2\sqrt{1-y}+1-y)\}dy$$

$$=4\pi\int_0^1\sqrt{1-y}\,dy$$

$$=4\pi\left[-\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{8}{3}\pi}$$

[B]　まずは，x について解き，“ $x=$ ”で表す。

[C]



2 つの回転体の体積の差を求める。